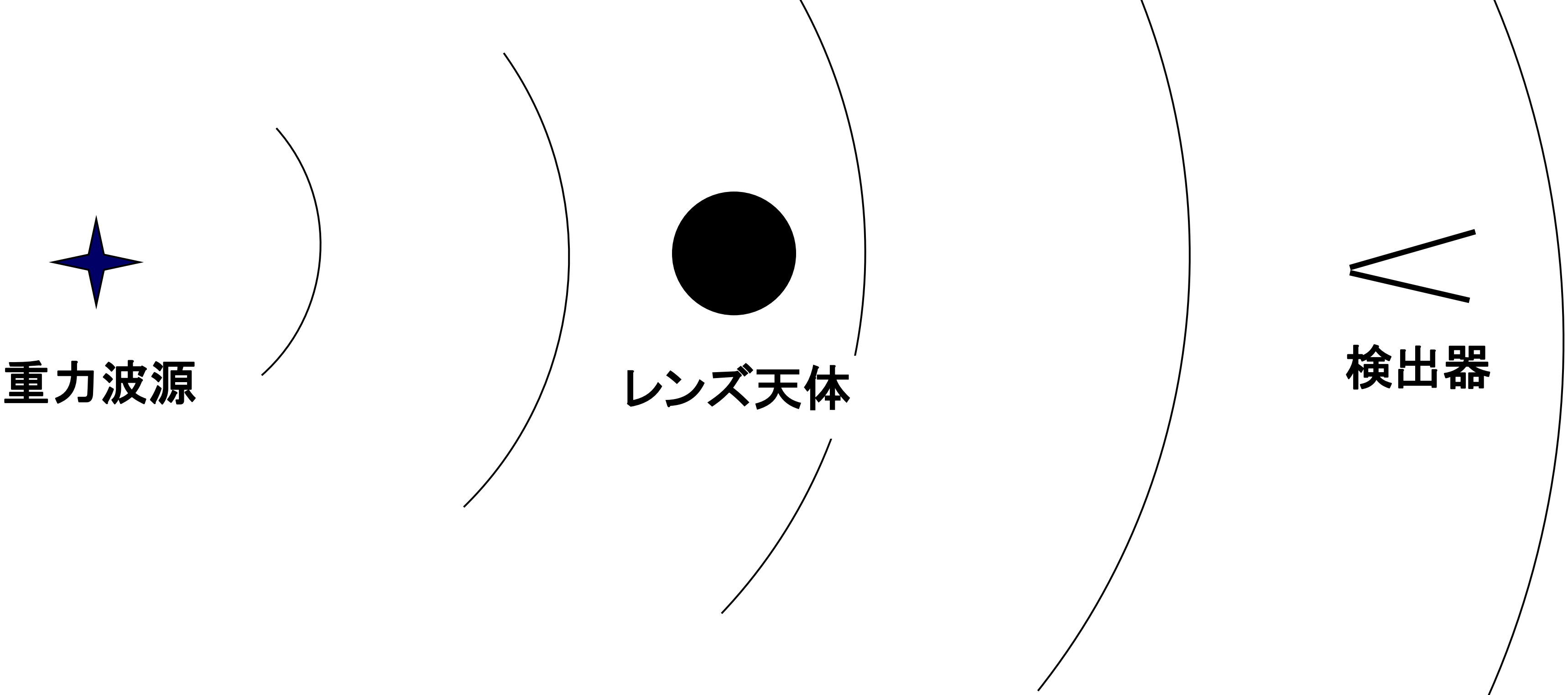
重力波の重力レンズでの波動効果

高橋龍一（国立天文台PD）

目次

0. Abstract



重力レンズを受けた重力波

・光の重力レンズとの違い

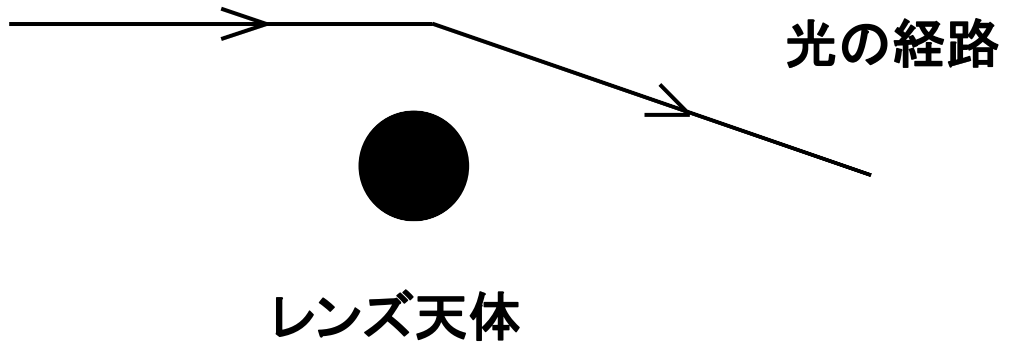
・波動効果

・重力波の波形への影響　　など

目次

1. Introduction

●重力レンズ



光の重力レンズは通常、

幾何光学近似を用いて記述される

光の波長 ≪ レンズ天体のサイズ

●重力レンズの波動効果

（Schneider, Ehlers & Falco 1992; T.T. Nakamura & Deguchi 1999）

重力波の波長

$\approx 10^3\,\mathrm{km}$ **for 地上のレーザー干渉計**

例：TAMA検出器@国立天文台

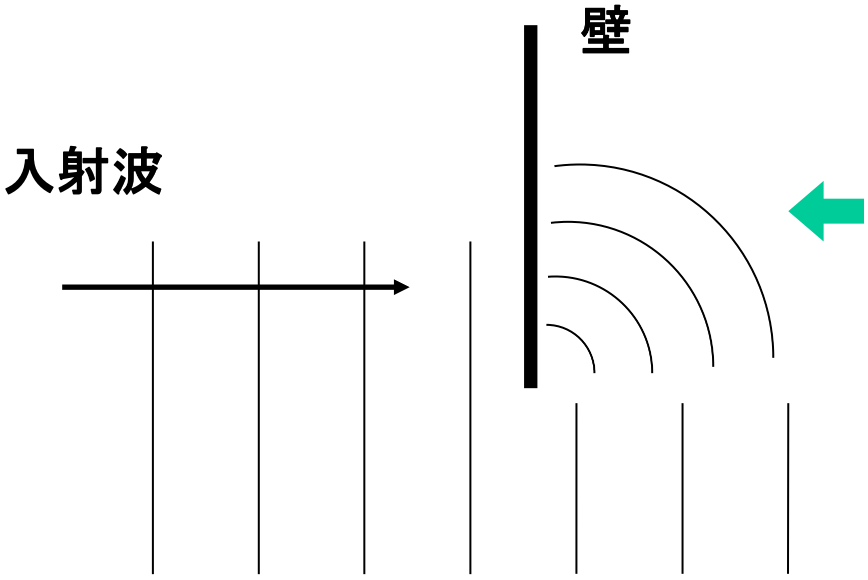
$\approx 1\mathrm{AU}$ **for スペースのレーザー干渉計LISA（~2014）**

光の波長（例：可視光 $\approx 1\mu\mathrm{m}$）に比べずっと長い

波の性質（回折と干渉）が現れやすいと期待される

1.1 回折

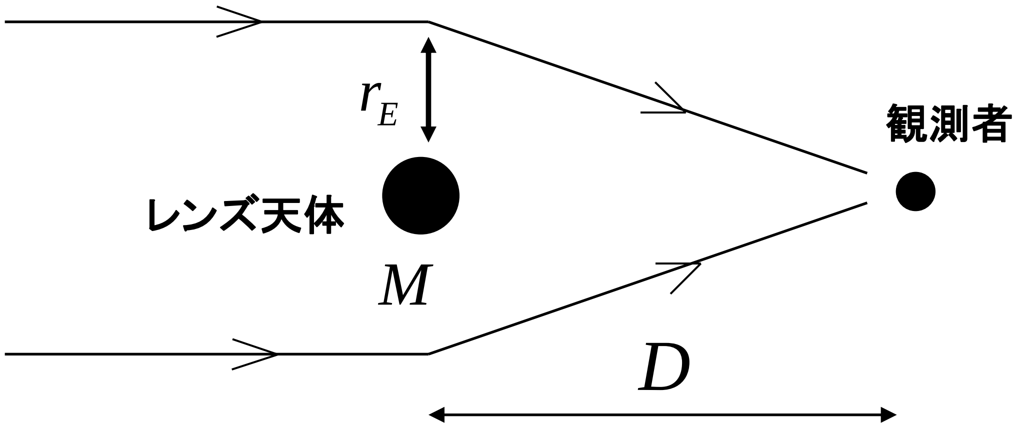
回折効果



波が壁の後ろにまわりこむ現象
波長が長いほうが現れやすい

（理化学辞典より）

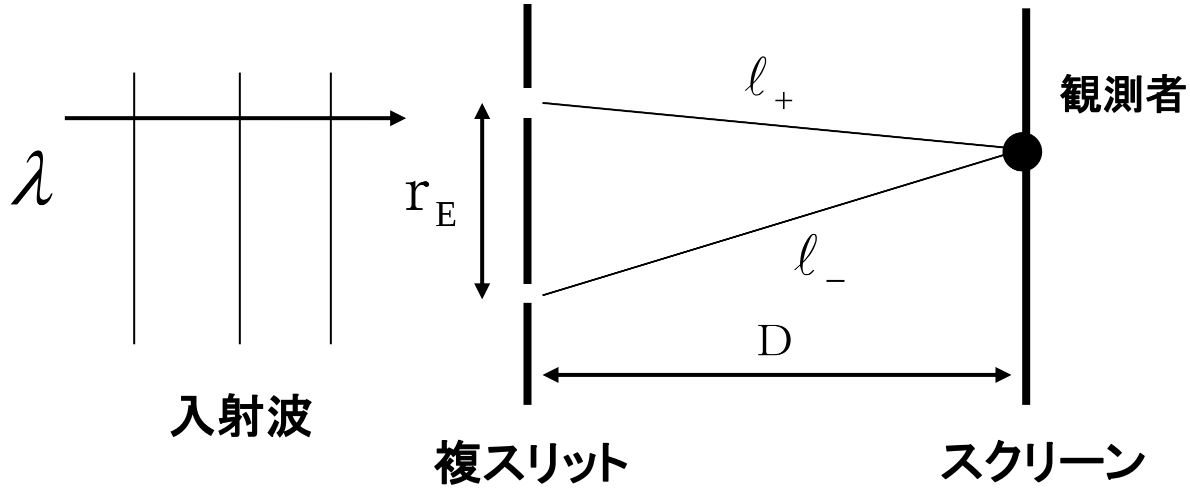
●複スリット（T.T. Nakamura 1998）



Einstein 半径

$$r_E \approx (MD)^{1/2}$$

$$(c = G = 1)$$



行路差

$$\Delta\ell = |\ell_+ - \ell_-| \approx M$$

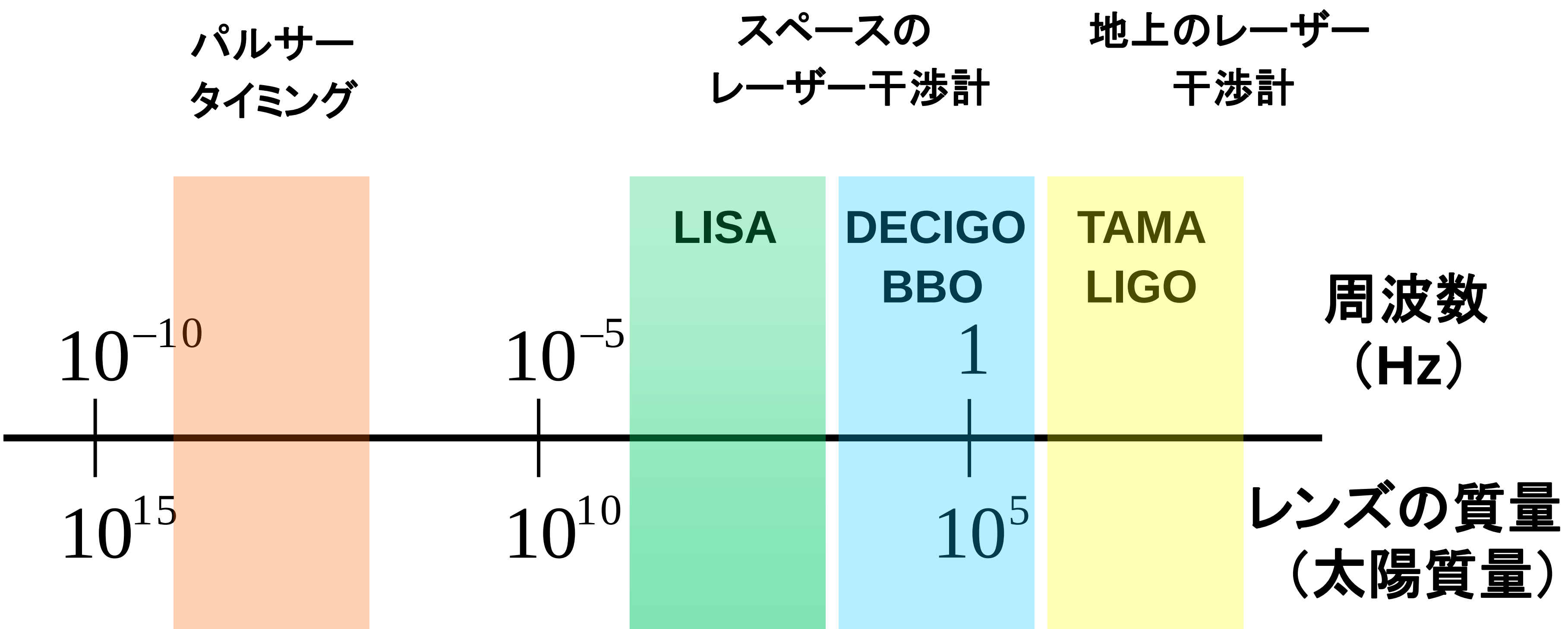
➡ $\lambda > M$ ⟶ **波動効果（回折）**

波長がレンズ天体のサイズ（シュワルツシルト半径）より長くなると回折効果が現れる

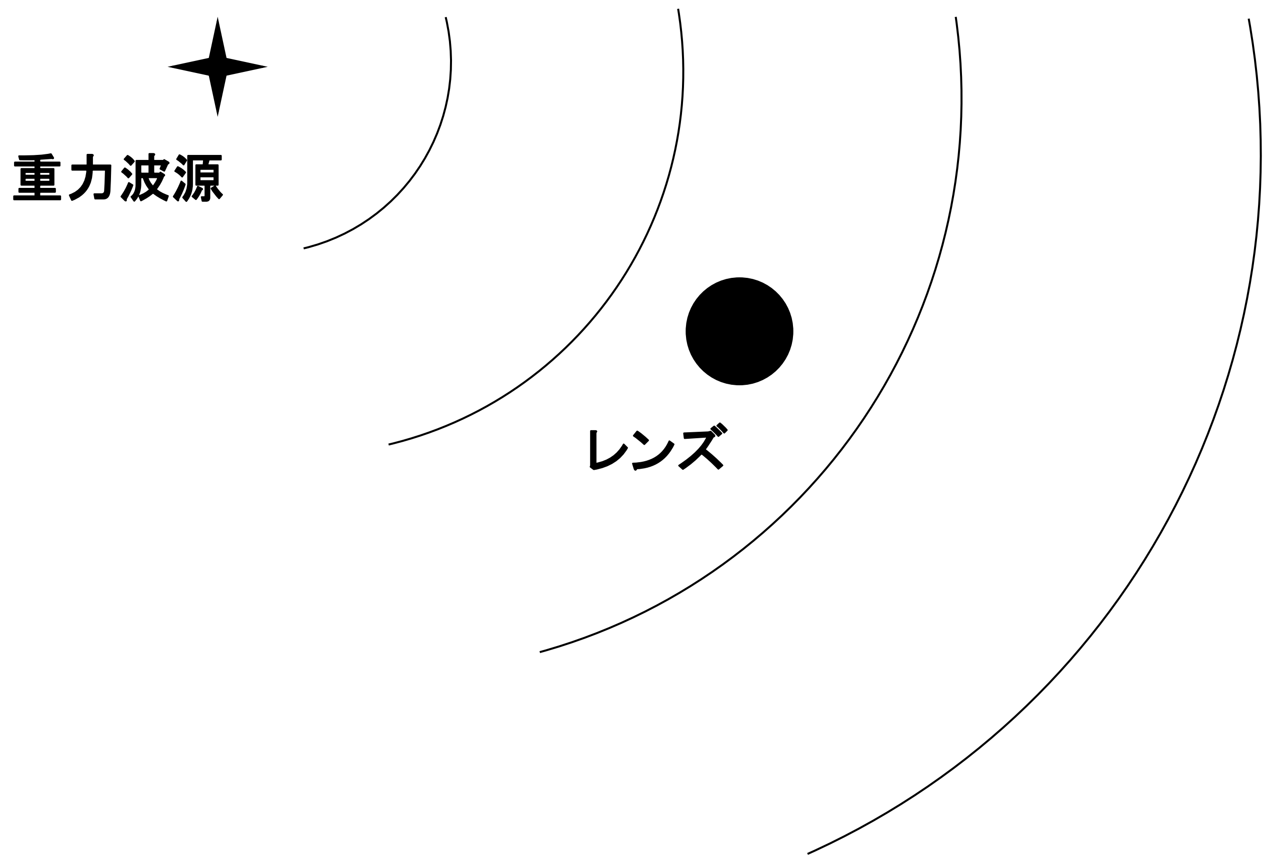
$$M < 10^5 M_{sun} \left(f / \mathrm{Hz} \right)^{-1}$$

M : レンズの質量

f : 重力波の周波数



● 波長が長い極限 $\lambda >> M$

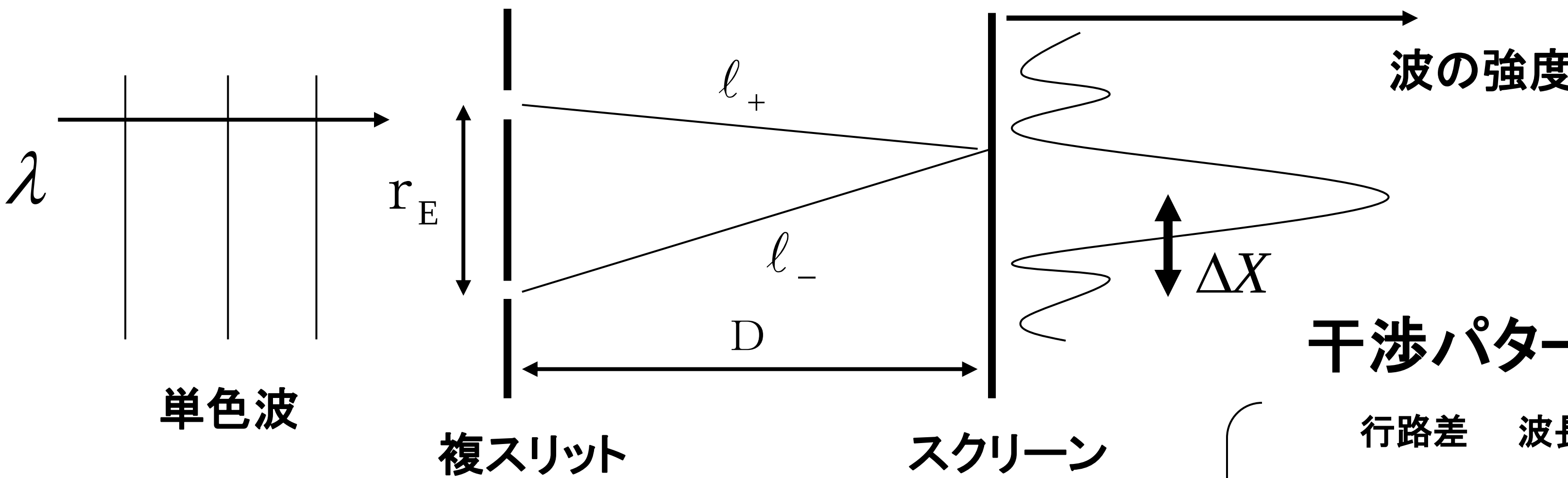


重力波はレンズ天体の存在を感じずに伝播する

2.2 干渉効果

重力波:コヒーレントな波 ⟶ 干渉

$$r_E \approx (MD)^{1/2}$$



干渉パターン

行路差　波長

$$\left|\ell_+ - \ell_-\right| = n\lambda$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

明暗の間隔 ΔX

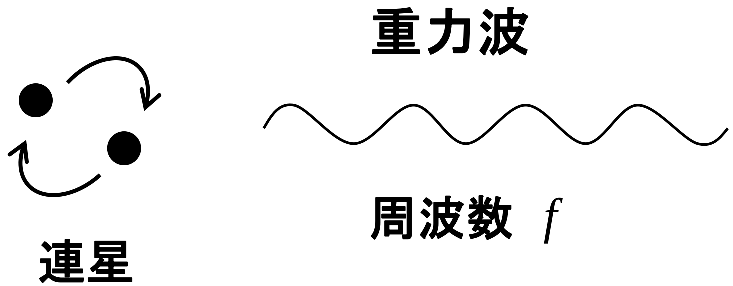
$$\Delta \mathrm{X} \approx \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{r_E}}\lambda$$

$$\approx 0.1\,\mathrm{AU}\left(\frac{\mathrm{M}}{10^6\,\mathrm{M_{sun}}}\right)^{-1/2}\left(\frac{\mathrm{D}}{10\mathrm{kpc}}\right)^{1/2}\left(\frac{\mathrm{f}}{\mathrm{kHz}}\right)^{-1}$$

(Ruffa 1999)

●チャープシグナル

連星（中性子星、BH など）**：最も有望な重力波源**



重力波放出で運動エネルギーが減少

⬇

軌道半径が小さくなり、公転周期も短くなる

⬇

重力波の周波数が上がる $df/dt > 0$

重力レンズの周波数依存性が受かる

●チャープシグナルでの干渉パターン

行路差 $\Delta\ell = |\ell_+ - \ell_-|$

波長 λ

$$\Delta\ell = n\lambda \quad \text{明}$$

$$= (n + 1/2)\lambda \quad \text{暗}$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

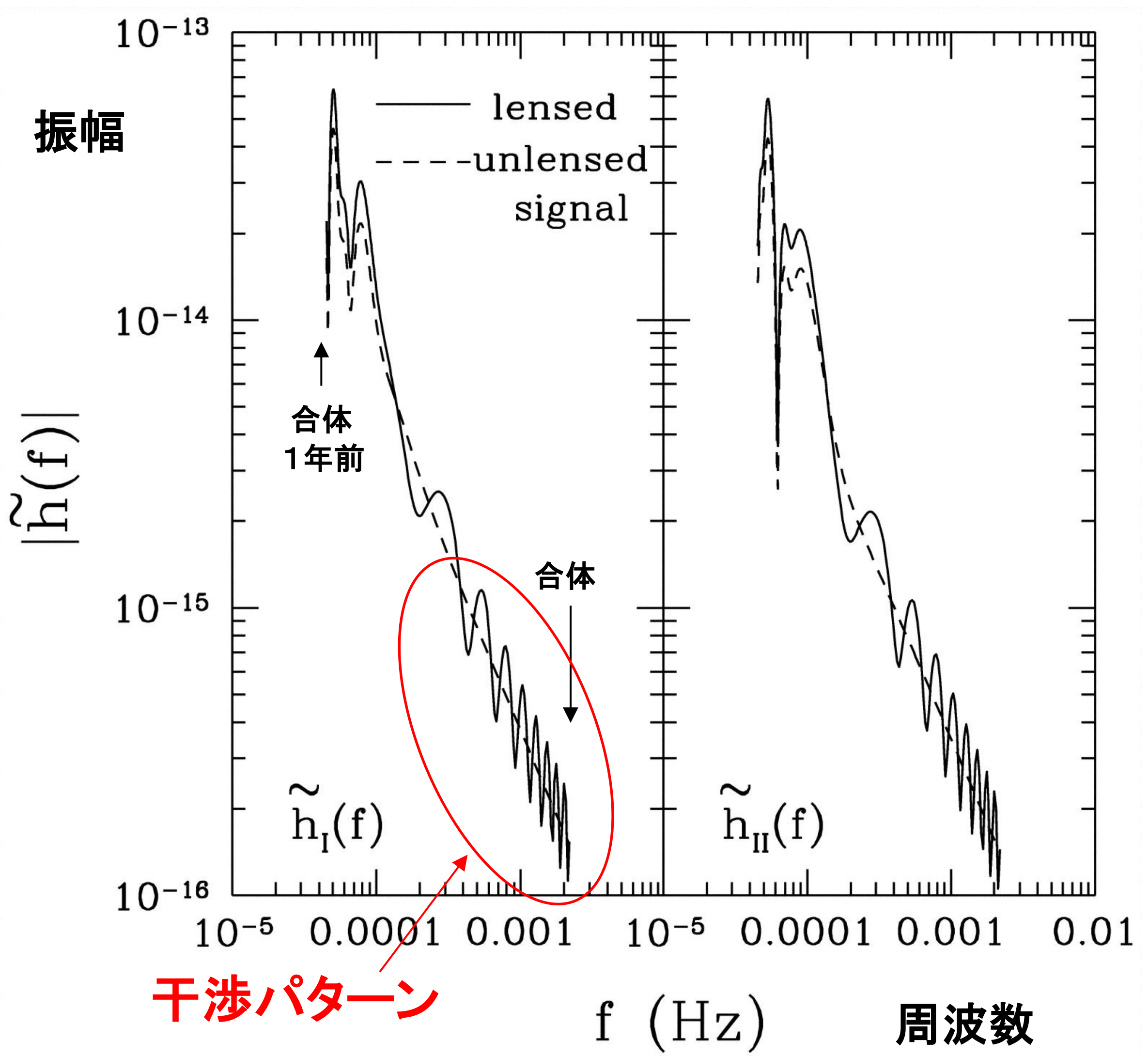
SMBH binary

$10^6 + 10^6 M_{sun}$ **at** $z = 1$

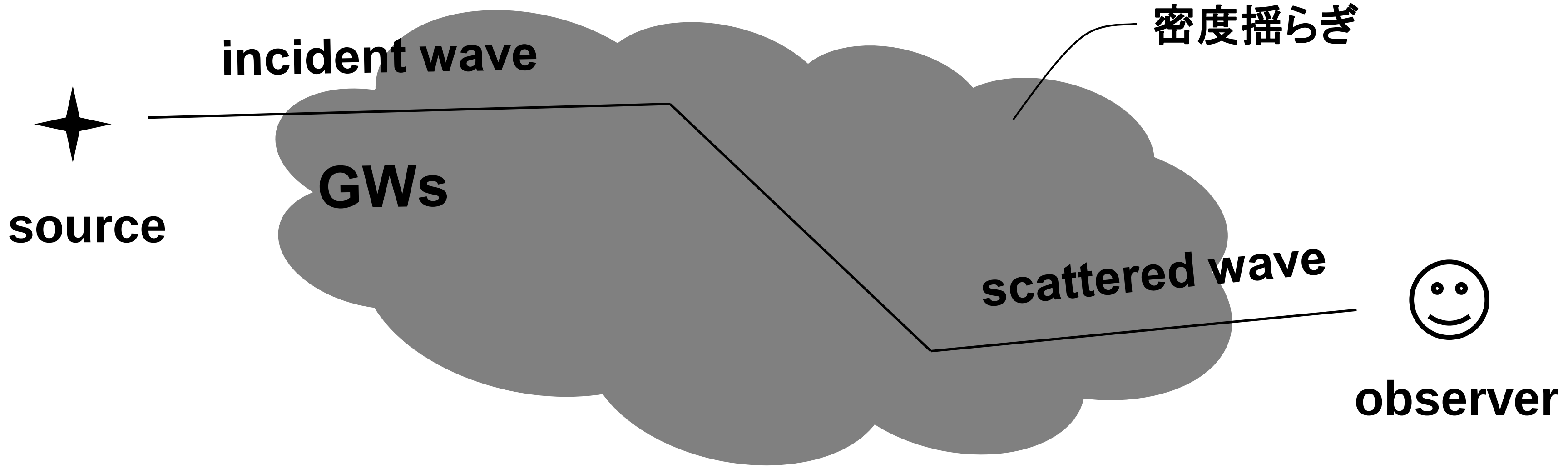
detected by LISA

質点レンズ $10^8 M_{sun}$

（RT & Nakamura 2003）



2.3 密度ゆらぎによる重力レンズでの波動効果（Macquart 2004; RT, Suyama & Michikoshi 2005）



密度揺らぎ（ダークマターやバリオン）のある時空を伝播する重力波

密度揺らぎのスケール ＜ Fresnel scale $r_F \approx (\lambda D)^{1/2}$

D : レンズまでの距離

波動効果（回折）がきく

$$r_F \approx 1\mathrm{pc}\left(\frac{f}{\mathrm{Hz}}\right)^{-1/2}\left(\frac{D}{\mathrm{Gpc}}\right)^{1/2}$$

Fresnel scale $r_F \approx (\lambda D)^{1/2}$

Einstein 半径 $r_E \approx (M D)^{1/2}$ **に** $M = \lambda$ **の条件をいれたもの**

2.4 光(電磁波)の重力レンズとの違い

・光学的に厚い領域が見える

・重力レンズを受けたかどうかは、time delay で調べる

レーザー干渉計の角度分解能　～1deg

↑ ２重像を分解できない

・軽いレンズ天体まで確認出来る

θ_E :Einstein angle

$\theta_{\lim}$: 光での角度分解能

（電磁波）
$$\theta_E \approx (M/D)^{1/2} > \theta_{\lim}$$

$$M > 10^{11} M_{sun} \left(\frac{D}{Gpc}\right)\left(\frac{\theta_{\lim}}{1''}\right)^2$$
銀河スケール

・重力波源は十分コンパクトなので、大きさを考慮しなくていい

目次

2. 基礎方程式

●曲がった時空上での重力波の伝播

・**background metric**

$$ds^2 = -\left(1+2U\right)dt^2 + \left(1-2U\right)d\mathbf{r}^2 \equiv g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$$

U **: gravitational potential**

・**wave equation for scalar field** $\phi(t,\mathbf{r})$

$$\partial_\mu\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi\right) = 0$$

波動方程式は重力波でも
スカラー場でも同じ
（Peters 1974）

$$\left(\nabla^2 + \omega^2\right)\tilde{\phi} = 4\omega^2 U\,\tilde{\phi}$$

$\tilde{\phi}(\omega,\mathbf{x})$ **：フーリエ成分**

●レンズを受けた重力波の波形

波動方程式 $\left(\nabla^2+\omega^2\right)\tilde{\phi}=4\omega^2 U\tilde{\phi}$ の解

・回折積分 with thin lens 近似（Schneider, Ehlers & Falco 1992）

・量子力学のファインマン経路積分（Nakamura & Deguchi 1999）

・球対称レンズ（Suyama, RT & Michikoshi 2005）

角度と動径成分の変数分離 ⟶ 常微分方程式

・弱い重力ポテンシャル（RT, Suyama & Michikoshi 2005）

重力ポテンシャルの１次摂動（Born近似）

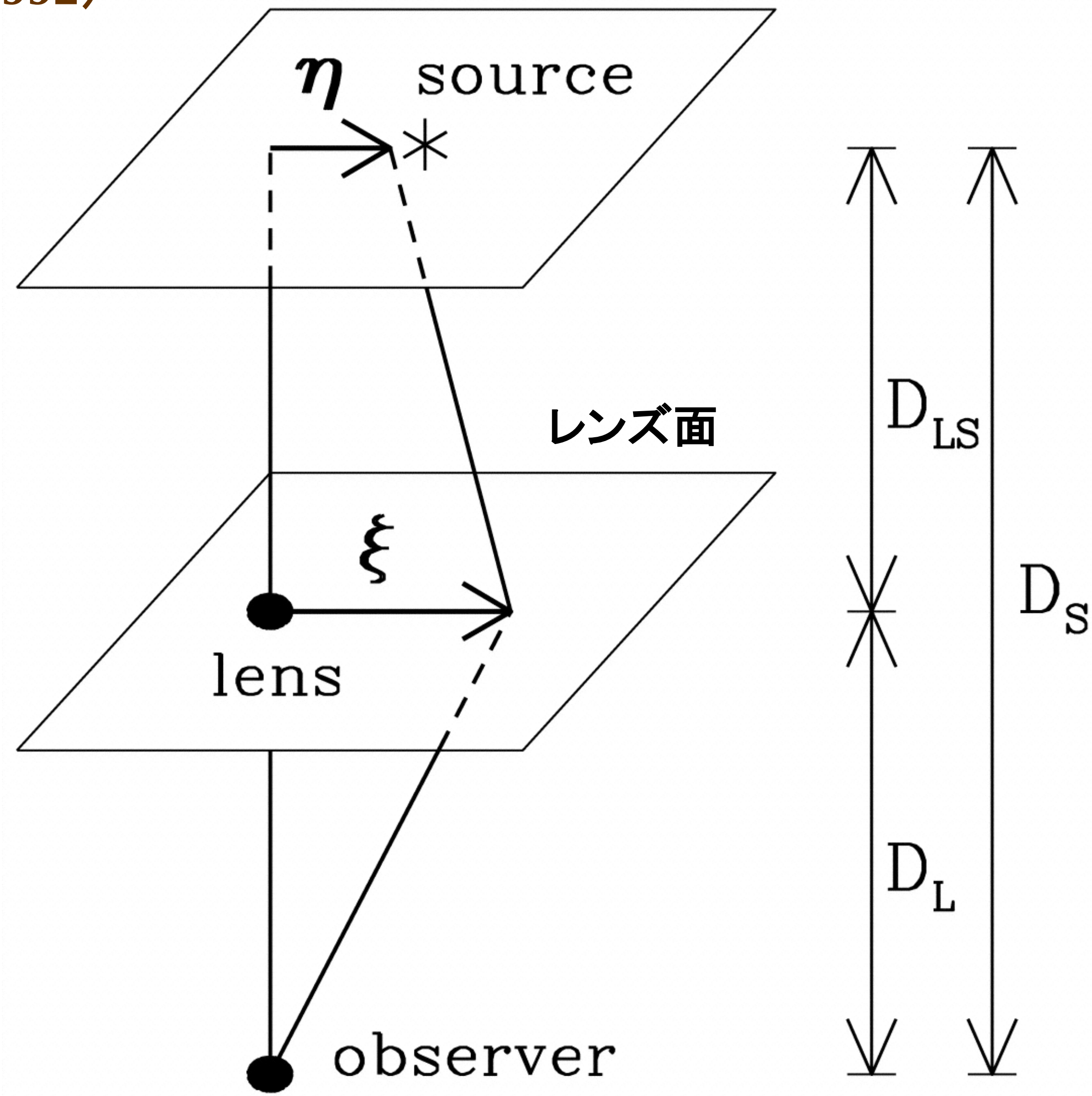
・質点レンズの場合 $U=-M/r$

解は超幾何関数で与えられる（Peters 1974; Deguchi & Watson 1986）

●回折積分

(Schneider, Ehlers & Falco 1992)

源、レンズ、観測者の配置図



thin lens 近似

：レンズ面上のみで $U \neq 0$

他は $U = 0$

重力波はレンズ面上のみで散乱される

thin lens 近似の妥当性

(Suyama, RT & Michikoshi 2005)

●Amplification factor（又はTransmission function）

$$F(\omega) \equiv \tilde{\phi}^L(\omega) \,/\, \tilde{\phi}(\omega)$$

$\tilde{\phi}^L$:レンズを受けた波

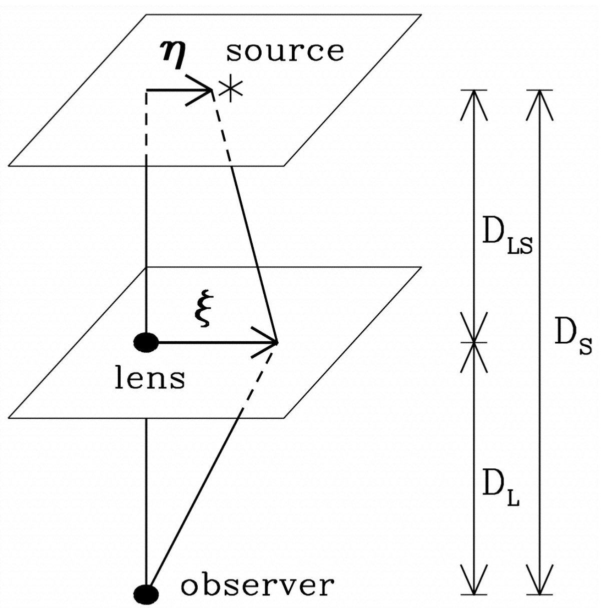
$\tilde{\phi}$:レンズなしの波

$$F(\omega, \boldsymbol{\eta}) = \frac{D_S}{D_L D_{LS}} \frac{\omega}{2\pi i} \int d^2\boldsymbol{\xi} \exp\left[i\omega t_d(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \right]$$

time delay

$$t_d(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = \frac{D_L D_S}{2D_{LS}} \left(\frac{\boldsymbol{\xi}}{D_L} - \frac{\boldsymbol{\eta}}{D_S} \right)^2 - \psi(\boldsymbol{\xi})$$

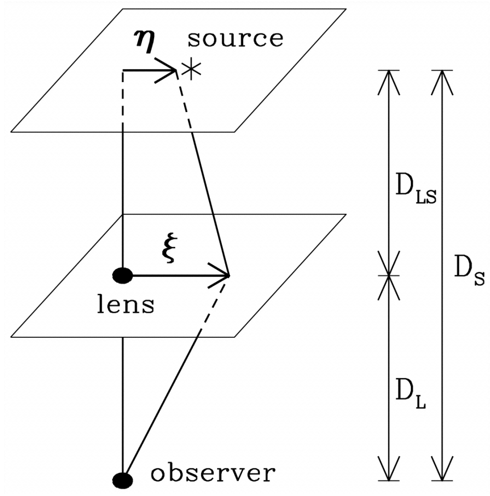
$\psi(\boldsymbol{\xi})$: レンズ面上の2次元重力ポテンシャル



Amplification factor

$$F(\omega,\boldsymbol{\eta})=\frac{D_S}{D_L\,D_{LS}}\frac{\omega}{2\pi i}\int d^2\xi\exp\left[i\,\omega\,t_d(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})\right]$$

$$t_d(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})=\frac{D_L D_S}{2D_{LS}}\left(\frac{\boldsymbol{\xi}}{D_L}-\frac{\boldsymbol{\eta}}{D_S}\right)^2-\psi(\boldsymbol{\xi})$$: time delay



●幾何光学近似 $(\omega \to \infty)$

t_d の停留点 (stationary point) が積分へ寄与する

$$\partial t_d(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})/\partial\boldsymbol{\xi}=0$$: レンズ方程式　（フェルマーの原理）

➡ 像の位置 ξ_j が決まる

レンズ面上での積分 ➡ それぞれの像の和

$$F(\omega,\boldsymbol{\eta})=\sum_j\left|\mu_j\right|^{1/2}\exp\left[i\,\omega\,t_{d,j}\right]$$

μ_j : j 番目の像の magnification

$t_{d,j}$: j 番目の像の time delay

時間空間での波

$$\phi^L(t) = \sum_j \left| \mu_j \right|^{1/2} \phi(t - t_{d,j})$$

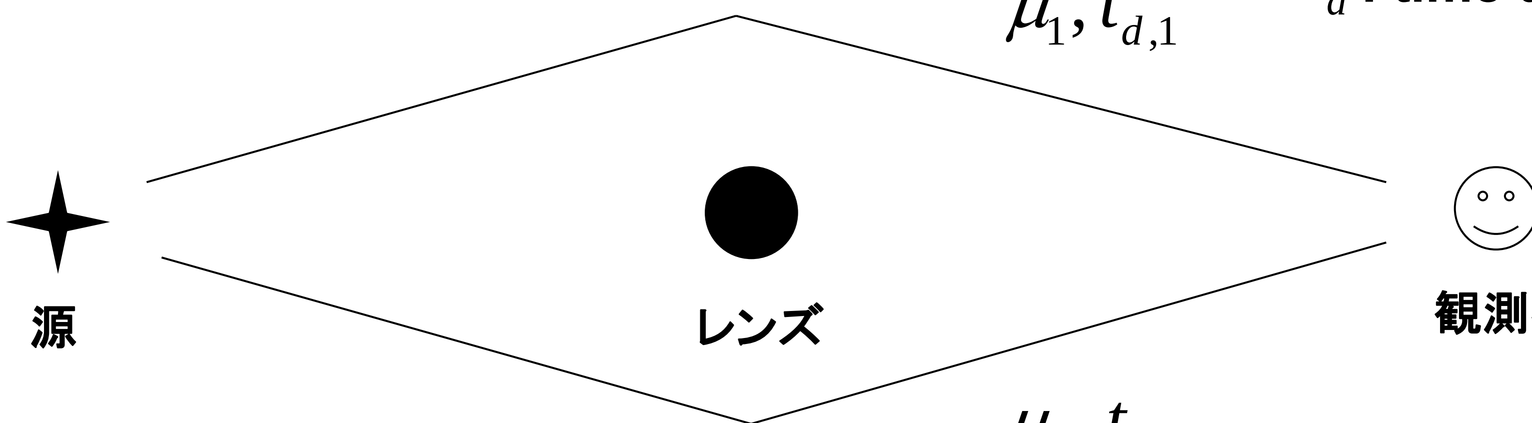
$\tilde{\phi}^L$:レンズを受けた波

$\tilde{\phi}$:レンズなしの波

μ : magnification

t_d : time delay

例:



Flux は μ 倍

Amplitude は $\mu^{1/2}$倍

$$\underbrace{\phi^L(t) = \left|\mu_1\right|^{1/2} \phi(t - t_{d,1})}_{\text{上の経路}} + \underbrace{\left|\mu_2\right|^{1/2} \phi(t - t_{d,2})}_{\text{下の経路}}$$

●質点レンズ $\left(\Sigma(\xi) = M\,\delta^2(\xi)\right)$

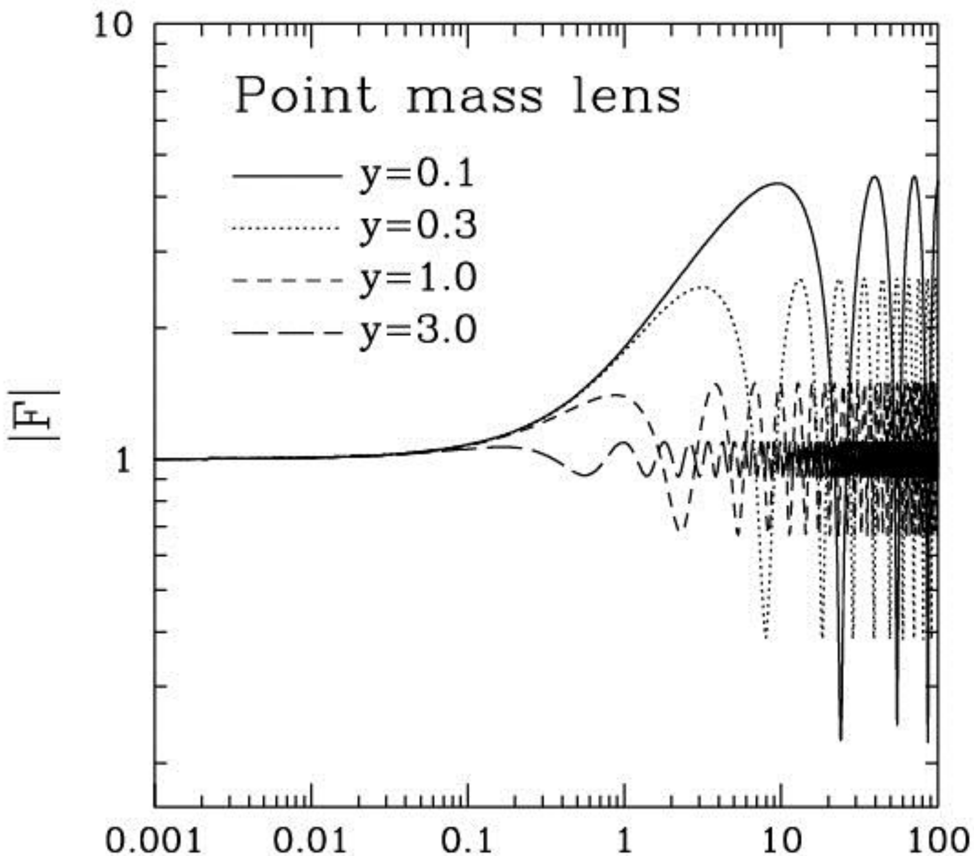
$w < 1$：増幅率（magnification）は十分小さい ⬅ 回折

$w \gg 1$：幾何光学近似

$$F(\omega) = |\mu_+|^{1/2} - i|\mu_-|^{1/2} e^{i\omega\Delta t_d}$$

$$|F(\omega)|^2 = |\mu_+| + |\mu_-| + \underbrace{2|\mu_+\mu_-|^{1/2}\sin(\omega\Delta t_d)}_{\text{干渉}}$$

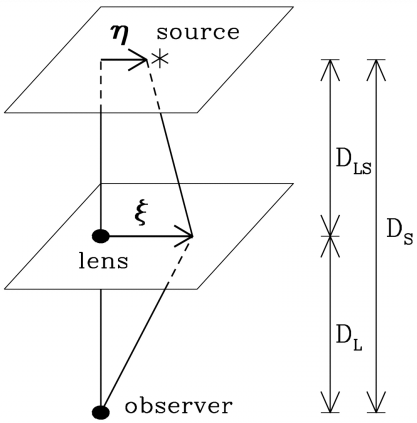
Δt_d：time delay の差



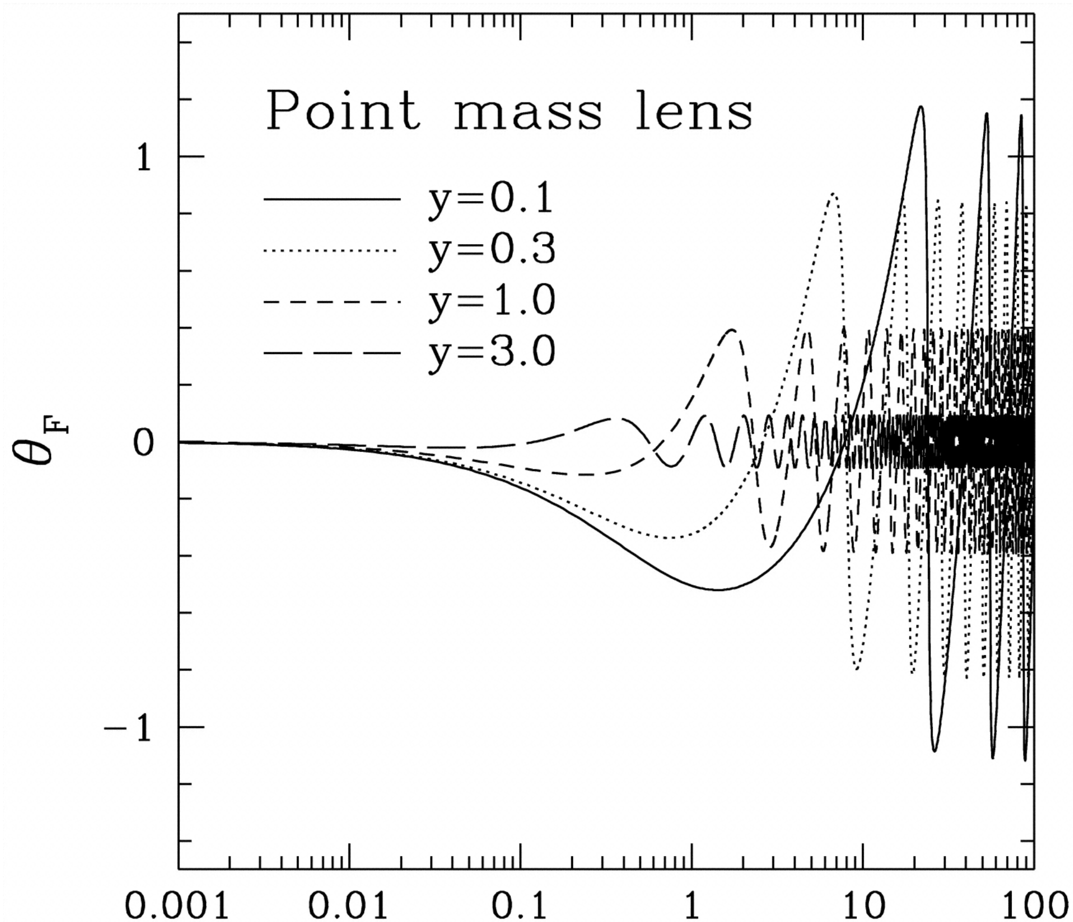
$$w \equiv 4M\omega$$

$$y = \eta/\eta_E$$

$\eta_E = (4MD_{LS}D_S/D_L)^{1/2}$: Einstein 半径



F の位相 $\theta_F = -i \ln F / |F|$



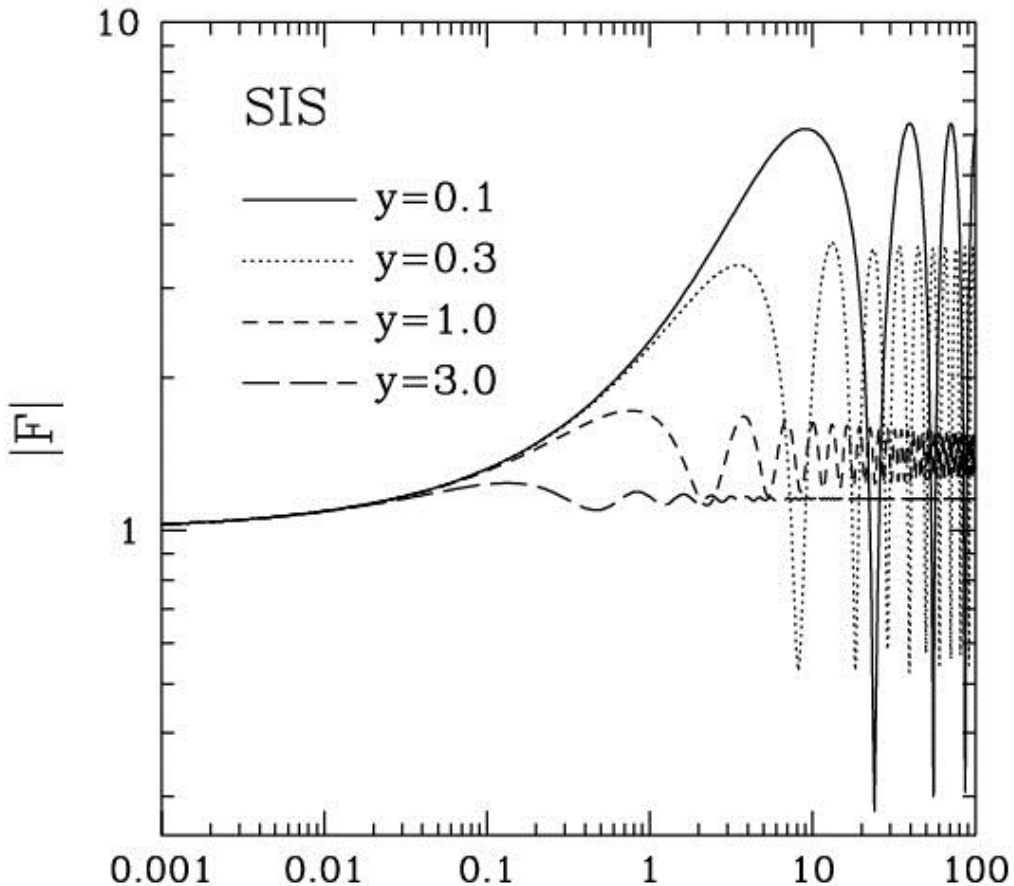
$w \equiv 4M\omega$

●等温球型 $\left(\Sigma(\xi)=v^2/2\xi\right)$

$w>>1$ ：幾何光学近似

$$|F(\omega)|^2=|\mu_+|+|\mu_-|+2|\mu_+\mu_-|^{1/2}\sin(\omega\Delta t_d) \quad \textbf{for } y<1$$

$$=|\mu_+| \quad \textbf{for } y\geq 1$$

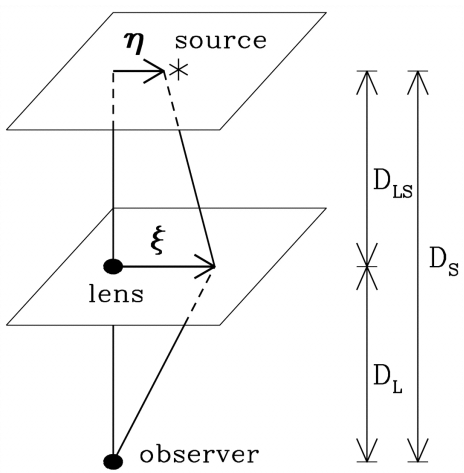


$$w\equiv 4M\omega$$

Δt_d : **time delay の差**

$$y=\eta/\eta_E$$

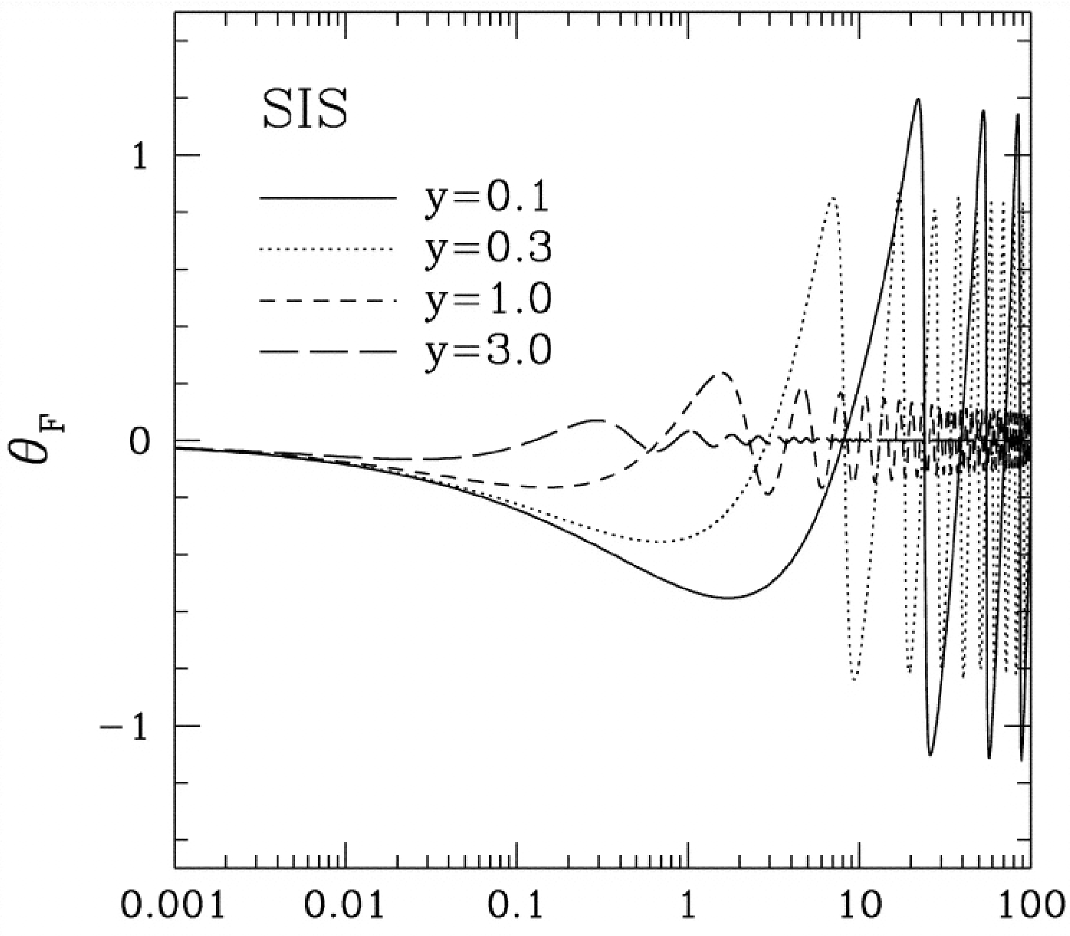
$\eta_E=4\pi v^2 D_{LS}$ **: Einstein 半径**



$$M\equiv 4\pi^2 v^4 D_L D_{LS}/D_S$$

: Einstein 半径内の質量

F の位相 $\theta_F = -i \ln F / |F|$



$w \equiv 4M\omega$

目次

3. 最近の研究

～主な研究3つ　簡単に紹介する～

3.1 準幾何光学近似（RT 2004）

- λ ≪M　　幾何光学近似
- λ ＜M　　準幾何光学近似（波長が十分短くない場合）

⬇

幾何光学　＋　λ /M　の1次の摂動

（λ →0）

（回折効果を摂動的に取り入れる）

↑

波動光学と幾何光学の違い

$$\frac{\lambda}{M} \approx \left(\frac{\lambda}{1\mathrm{AU}}\right)\left(\frac{M}{10^8 M_{sun}}\right)^{-1}$$

Amplification factor F を1/ω で摂動展開

$$F(\omega,\boldsymbol{\eta})=\frac{D_S}{D_L\,D_{LS}}\frac{\omega}{2\pi i}\int d^2\boldsymbol{\xi}\exp\left[i\omega t_d(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})\right]$$

$$\cong F_{geo}(\omega,\boldsymbol{\eta})+dF(\omega,\boldsymbol{\eta})$$

$$t_d(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})=\frac{D_L D_S}{2D_{LS}}\left(\frac{\boldsymbol{\xi}}{D_L}-\frac{\boldsymbol{\eta}}{D_S}\right)^2-\psi(\boldsymbol{\xi})$$

幾何光学近似　　補正項

$$O(1/\omega)$$

●結果1

像の増幅率(magnification)と time delay が変わる

$$F(\omega) \cong \sum_j \left|\mu_j\right|^{1/2}\left(1+\frac{i}{\omega}\Delta_j\right)e^{i\omega t_{d\,j}} + \mathrm{O}(\omega^{-2})$$

$$= \sum_j \left|\mu_j\left[1+\left(\frac{\Delta_j}{\omega}\right)^2\right]\right|^{1/2} e^{i\omega t_{d\,j}+i\delta\varphi_j} + O(\omega^{-2})$$

Δ_j: 実数

$\frac{\Delta_j}{\omega} \approx \frac{\lambda}{M}$ のオーダー

$\delta\varphi_j = \arctan\left(\Delta_j/\omega\right)$

magnification μ が $\mu\left[1+\left(\Delta_j/\omega\right)^2\right]$ に変化

time delay が $\delta\varphi_j$ だけずれる

●結果2

レンズ中心の密度分布にカスプがある場合

$$\rho(r) \propto r^{-\alpha} \quad (0 < \alpha \leq 2)$$

レンズの中心に回折像ができる

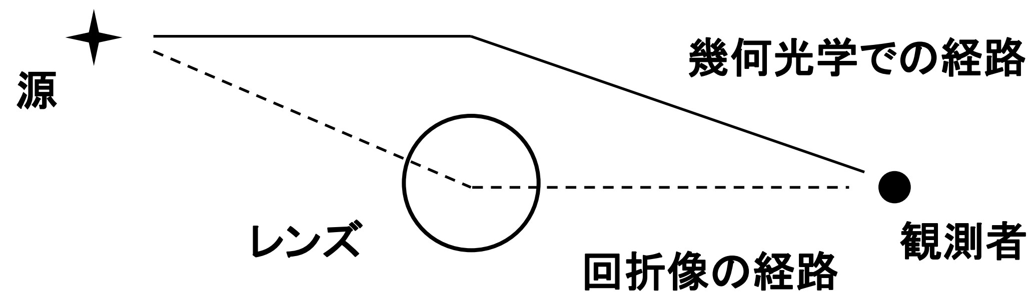
Amplification factor $$F(\omega, \boldsymbol{\eta}) = \frac{D_S}{D_L D_{LS}} \frac{\omega}{2\pi i} \int d^2\boldsymbol{\xi} \exp\left[i\omega t_d(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \right]$$

幾何光学近似の場合: time delay の停留点に像ができる

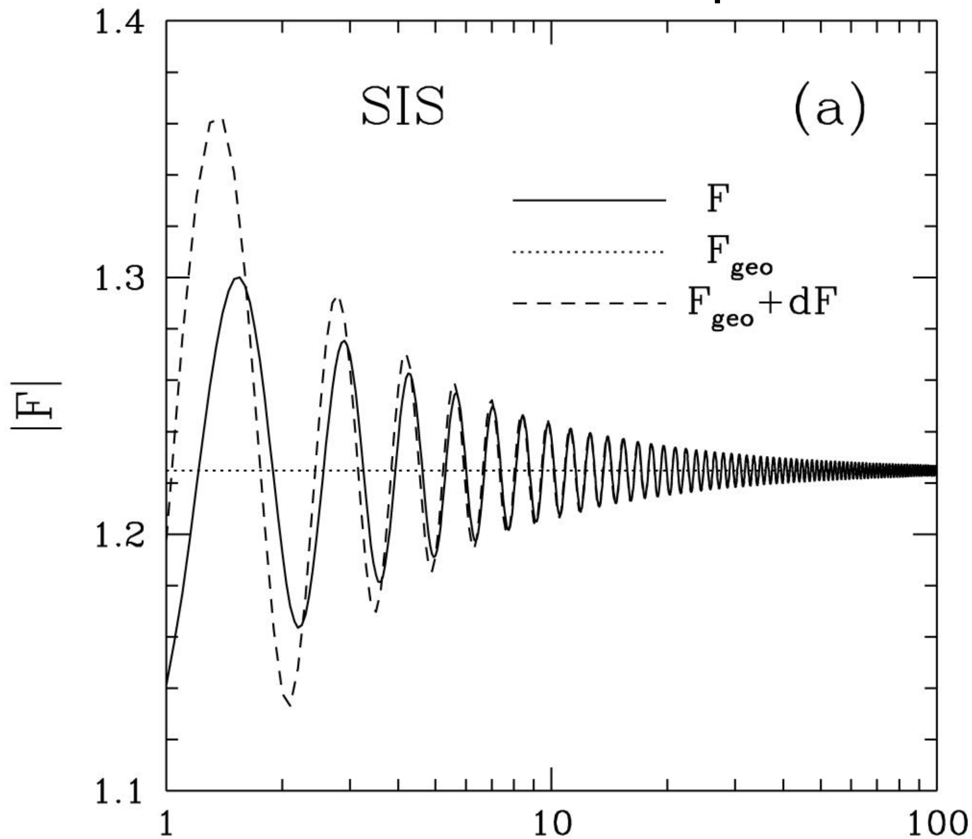
波長が有限だと停留点以外からも積分に寄与する

レンズ中心のカスプからの寄与がある

例:等温球型 $\rho(r) \propto r^{-2}$



$y = 2$　y : Einstein 半径で規格化した source position



$w \equiv 4M\omega$

幾何光学（ $\left|F_{geo}\right| = \left|\mu_+\right|^{1/2}$ ）では、像がひとつだが、2つの像による干渉パターンがある

3.2 重力波の波形からレンズ天体の情報を引き出す (RT & Nakamura 2003)

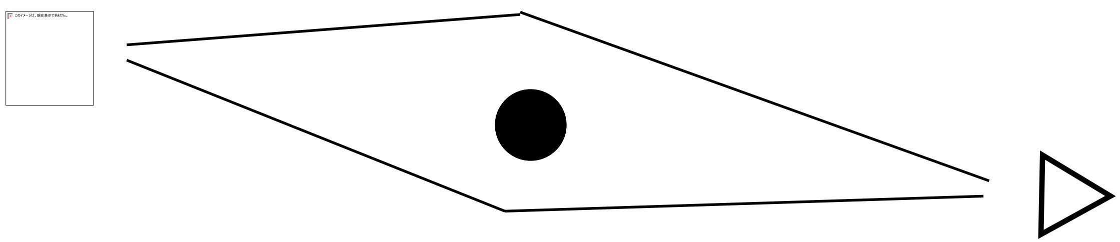
●問題設定

超巨大BH
の合体

$:10^4 - 10^7 \mathrm{M}_{sun}$

redshift $z = 1$

S/N $\approx 10^3$



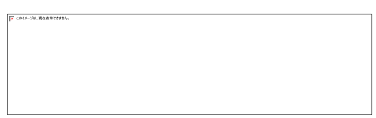
レンズ天体

・質点レンズ
BH
・等温球型 (SIS)
星団、銀河

LISA

$\approx 10^{-4} - 10^{-1}\,\mathrm{Hz}$

合体前1年観測

レンズの質量: 

time delay $\Delta t_d \approx 10 - 10^4\,\mathrm{sec} \ll 1\mathrm{yr}$

LISAで波動効果が重要になる領域

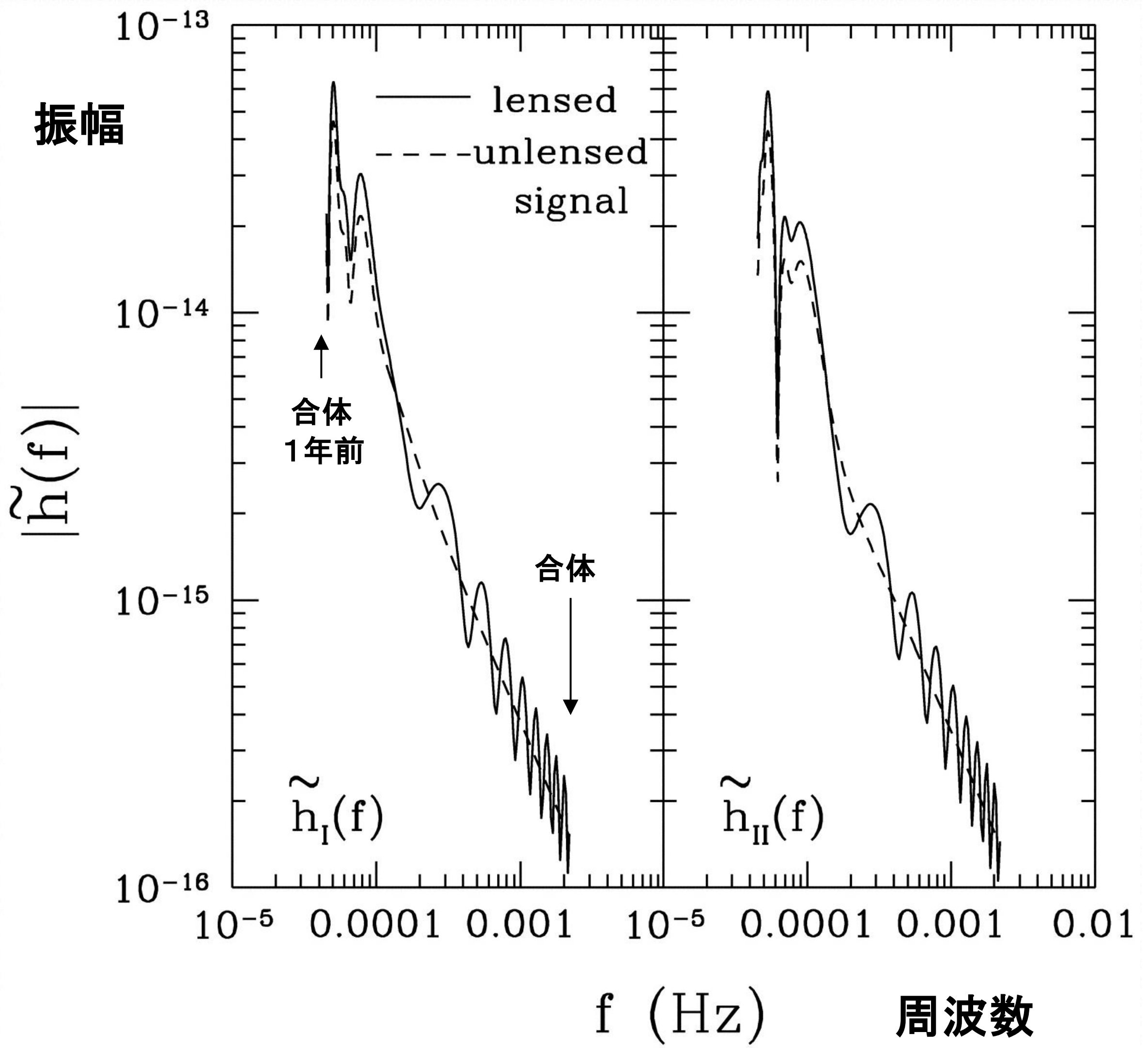
●重力レンズを受けた波形

SMBH binary

$10^6 + 10^6 M_{sun}$ **at** $z = 1$

detected by LISA

質点レンズ $10^8 M_{sun}$



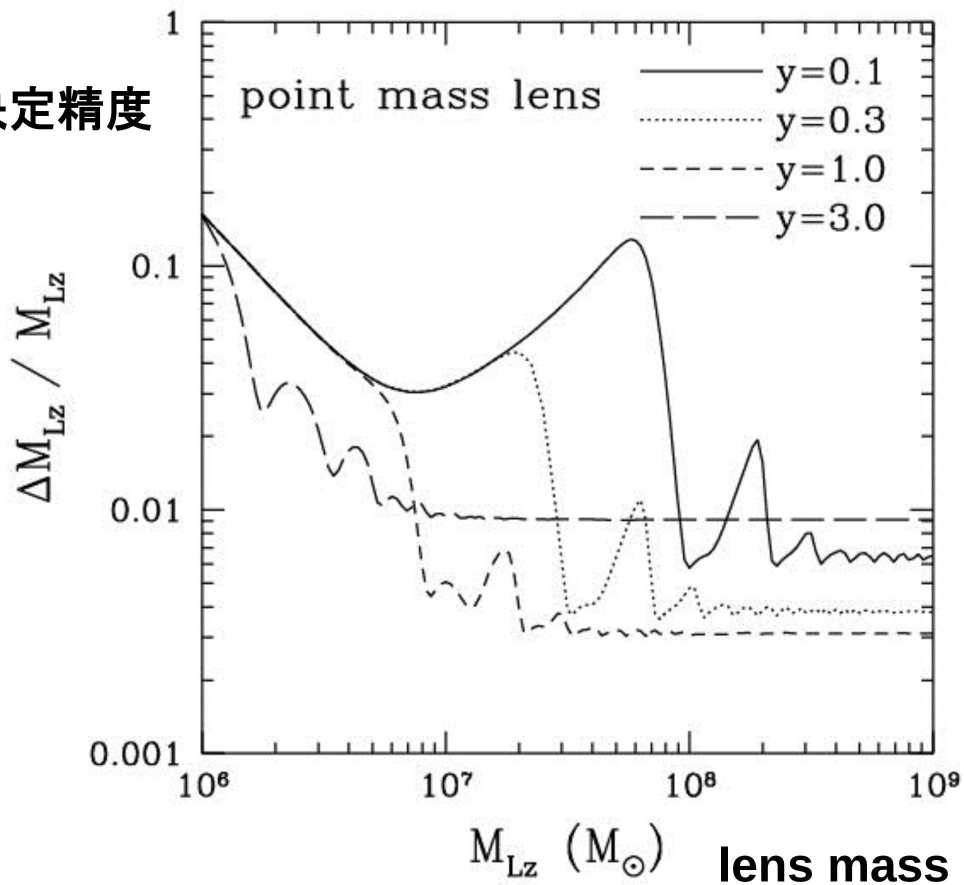
➡ **レンズ天体の情報(質量など)を引き出す**

●結果1

レンズ天体の質量はどのくらいの精度で決まるか

$10^6 + 10^6 M_{sun}$ **SMBHs at z=1**

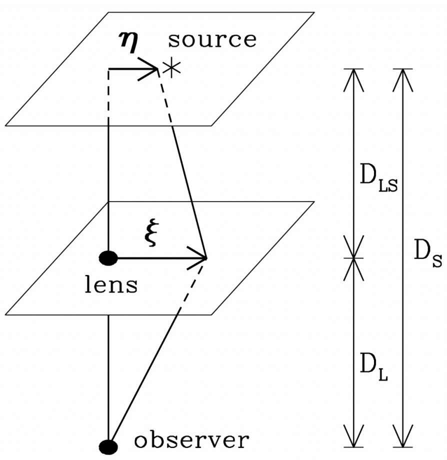
決定精度



lens mass

$y = \eta / \eta_E$

$\eta_E = (4MD_{LS}D_S/D_L)^{1/2}$ **: Einstein 半径**

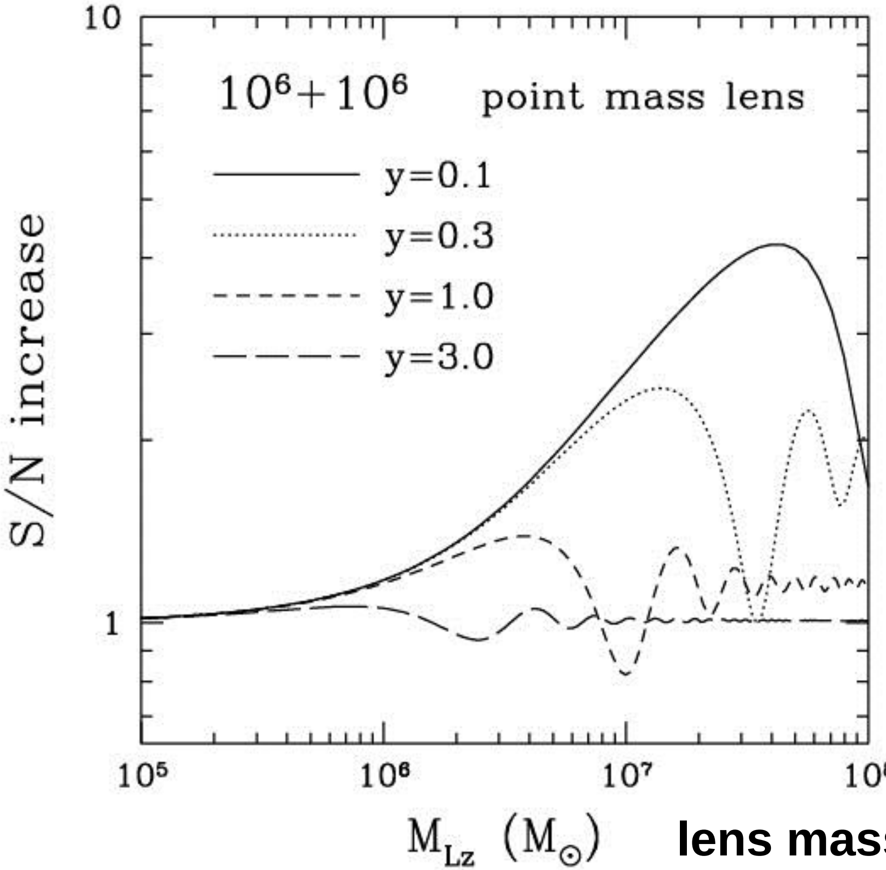


➡ $10^{7-8} M_{sun}$ より重いレンズ天体では、0.1-1% で質量がわかる

●結果2

重力波シグナルの S/N（signal-to-noise ratio）が何倍増えるか

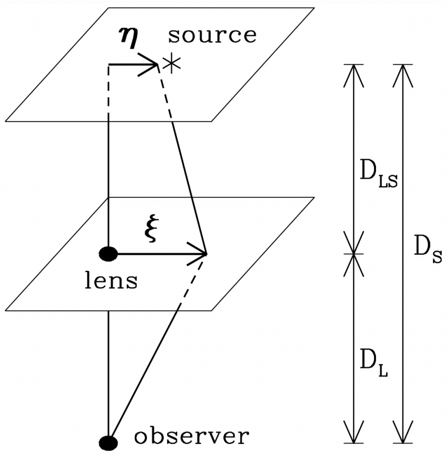
$10^6 + 10^6 M_{sun}$ **SMBHs at z=1**



lens mass

$y = \eta / \eta_E$

$\eta_E = \left(4MD_{LS}D_S / D_L\right)^{1/2}$ **: Einstein 半径**

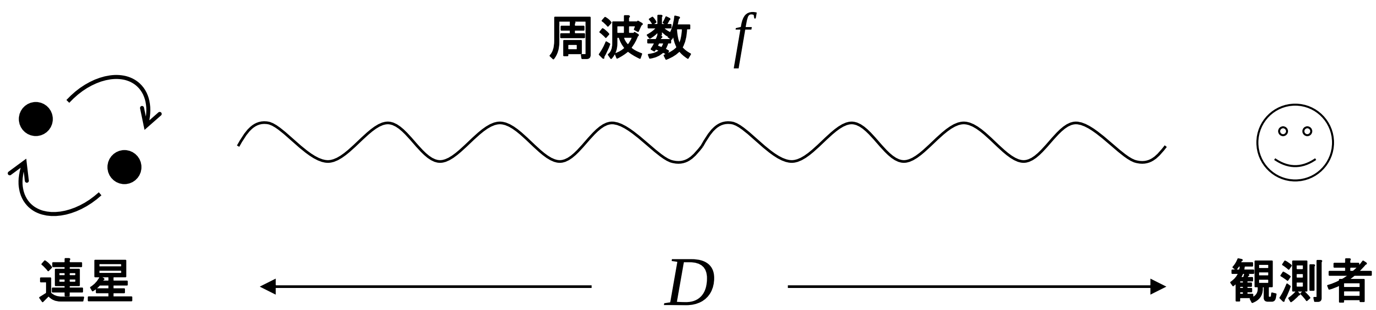


➡ $10^{6-8} M_{sun}$ より軽いレンズ天体では、シグナルは増幅されない

3.3 連星までの距離決定の不定性

● Cosmological standard siren

連星までの距離 D ← チャープシグナル $\dot{f}$ から直接決定



観測される振幅　$A \propto \dfrac{\dot{f}}{f^3 D}$　　　$f, \dot{f}, A$ から距離 D が決定

●重力レンズによる距離決定の不定性

（Holz & Hughes 2005; Kocsis et al. 2005）

レンズを受けると、振幅が増幅・減衰される

➡ **距離決定に不定性**

振幅： $A \to A_{obs} = \mu^{1/2} A$

距離： $D \to D_{obs} = \mu^{-1/2} D$

μ : magnification

$$\frac{\Delta D_{obs}}{D_{obs}} = \frac{\Delta D}{D} + \underline{\frac{1}{2}\frac{\Delta \mu}{\mu}}$$

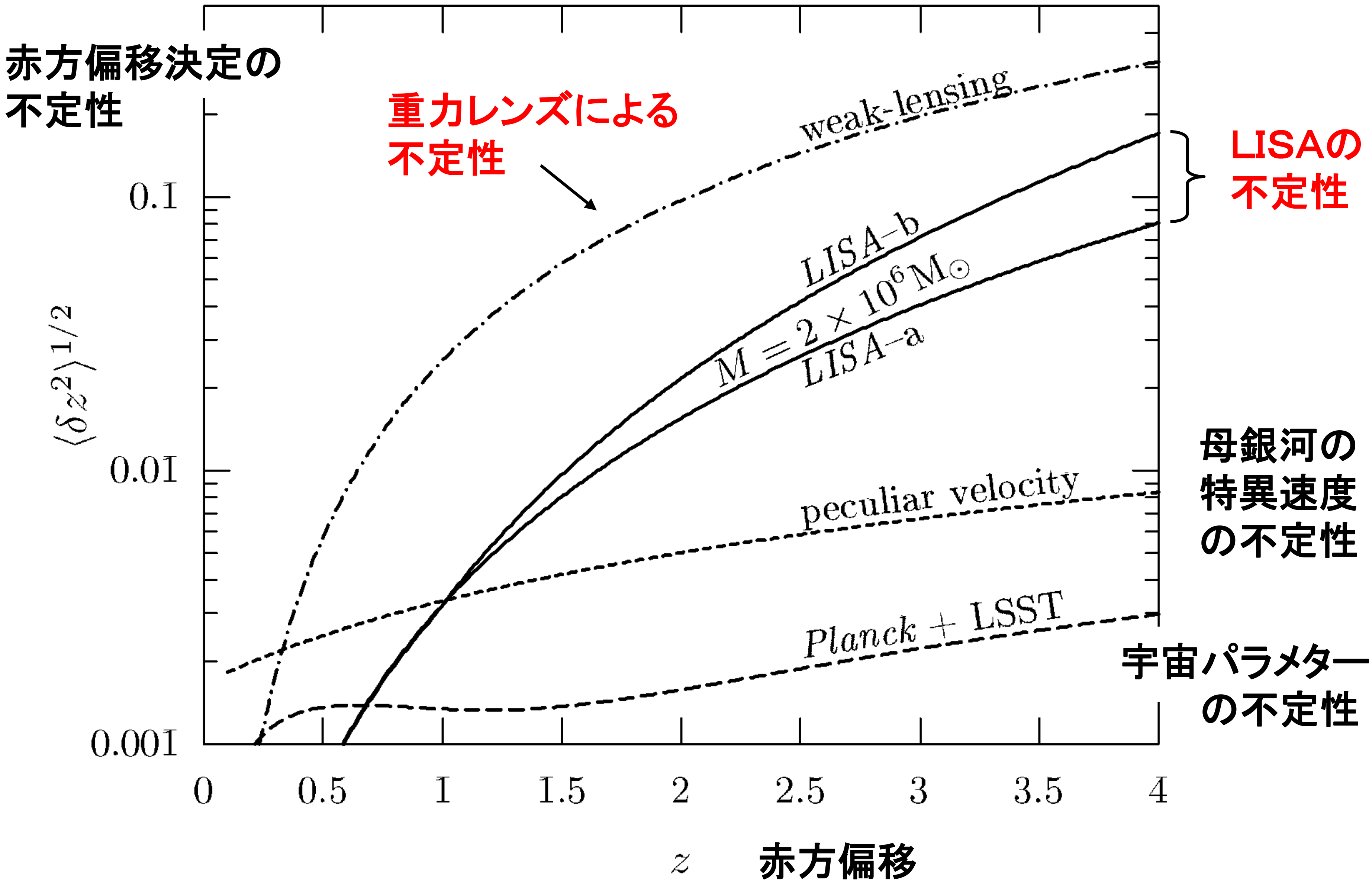
magnification の分散

≒数%程度

weak lensing の計算 (Bartelmann & Schneider 2001)

$10^6+10^6 M_{sun}$ BH連星の合体

(Kocsis et al. 2005)



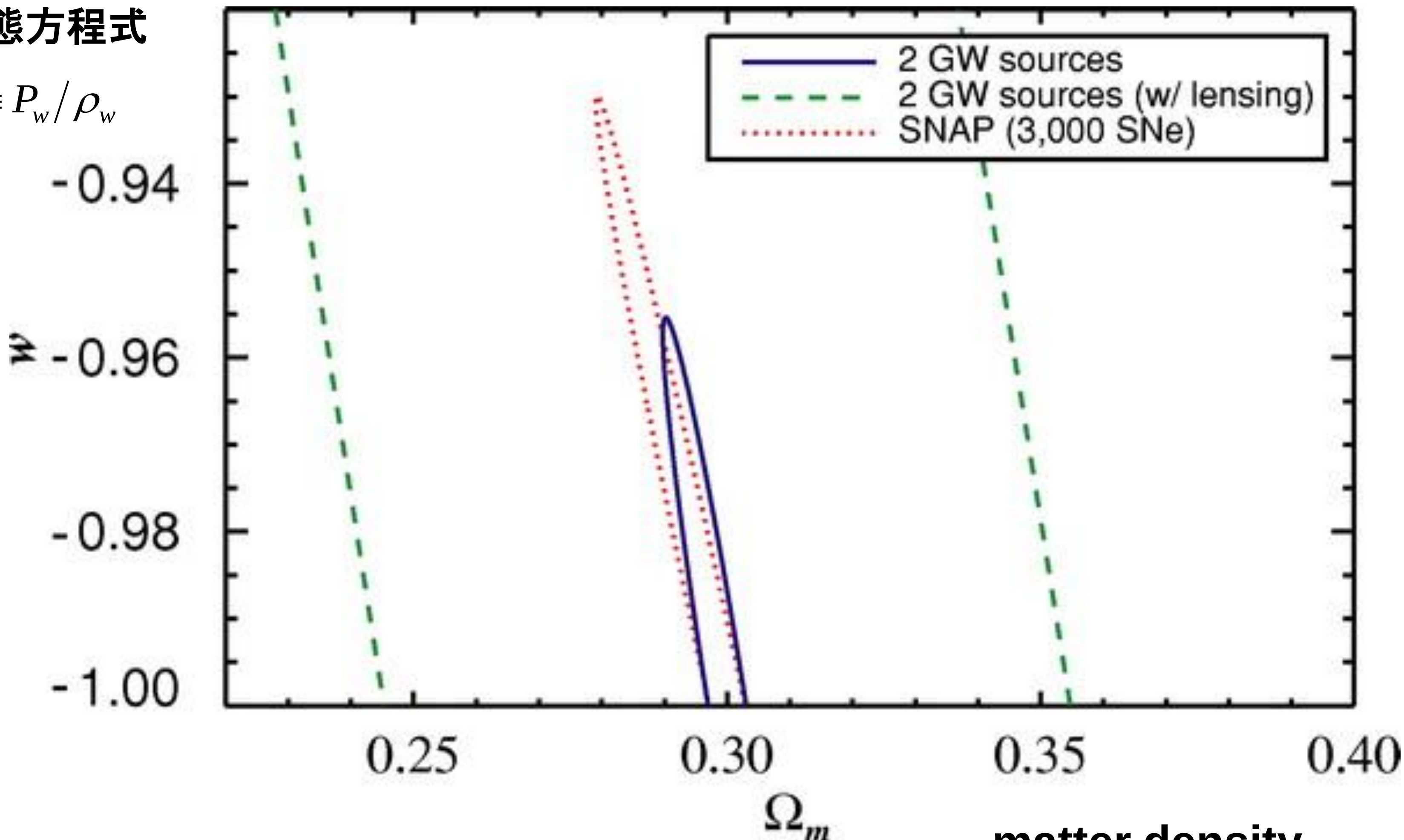
連星の距離-赤方偏移関係を使った宇宙パラメーターの決定精度

（Holz & Hughes 2005）

ダークエネルギーの状態方程式

$w \equiv P_w / \rho_w$

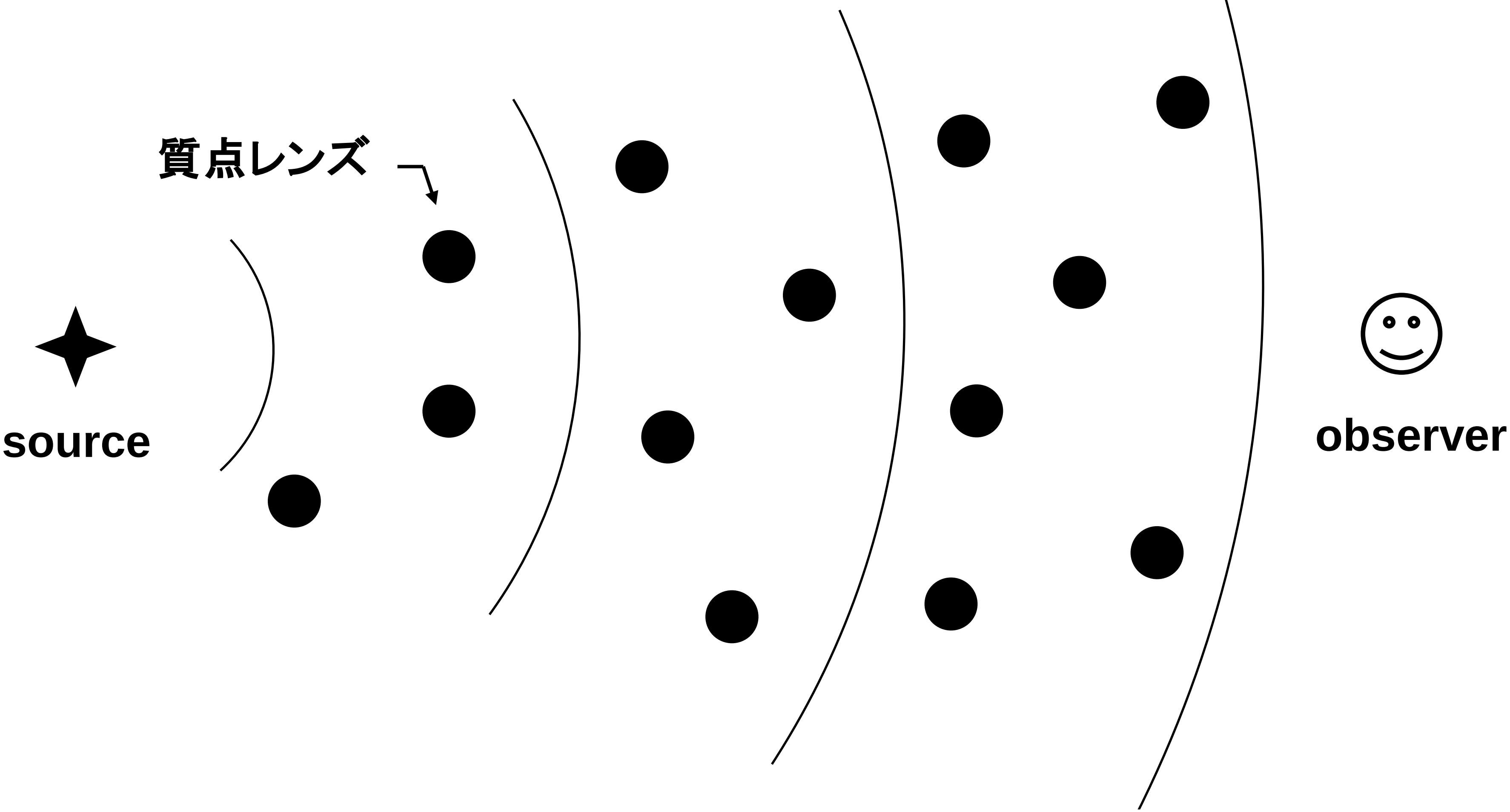
$10^5 + 6\times10^5 M_{sun}$ **SMBHs at z=1 & 3**



matter density

●距離-赤方偏移関係の分散を用いた、ダークマターの質量への制限

（Yoo, Nakao, Kozaki, RT in preparation）



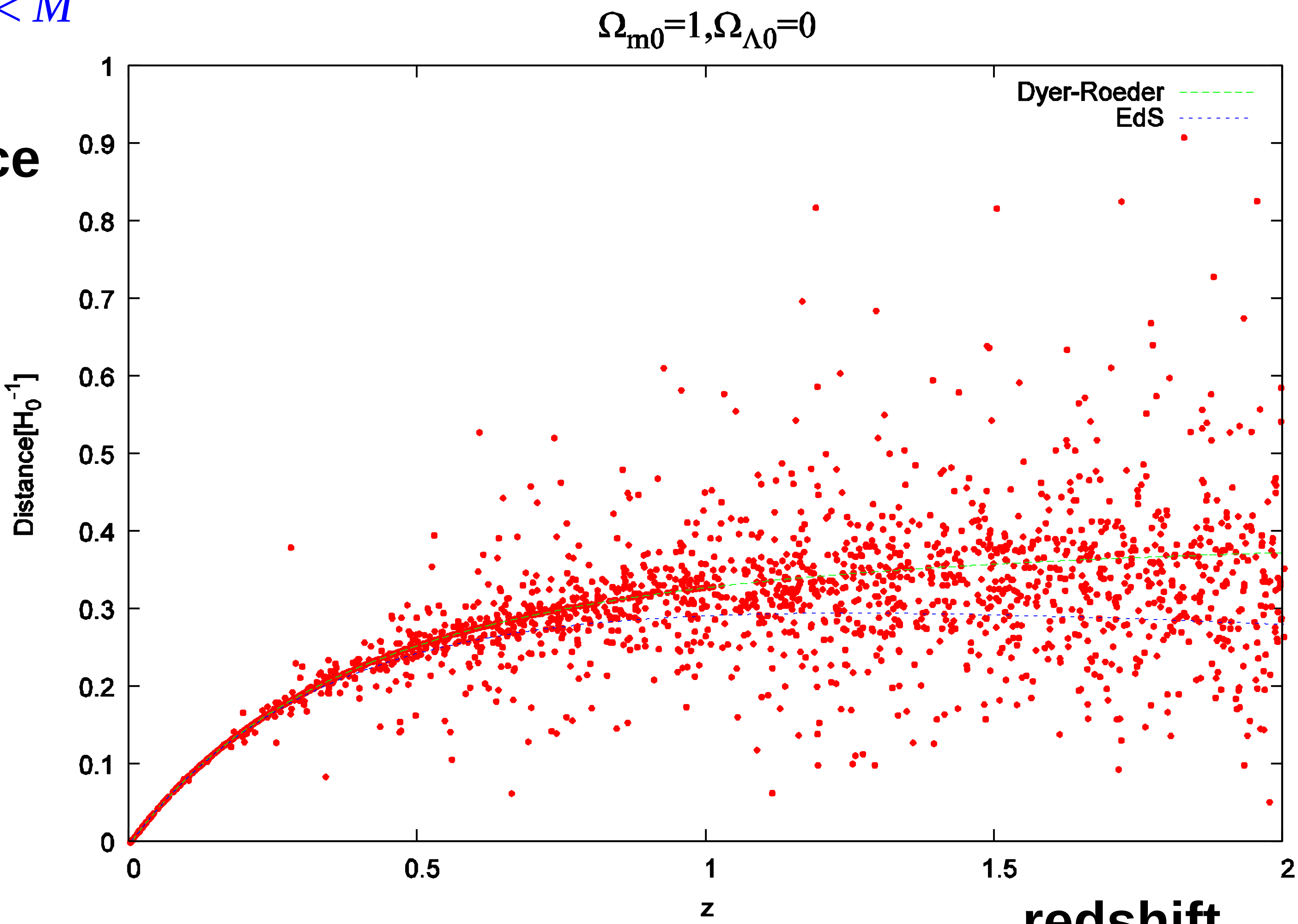
質点レンズが一様に分布する宇宙

幾何光学近似

$\lambda << M$

サンプル2000個

distance $\left(H_0^{-1}\right)$



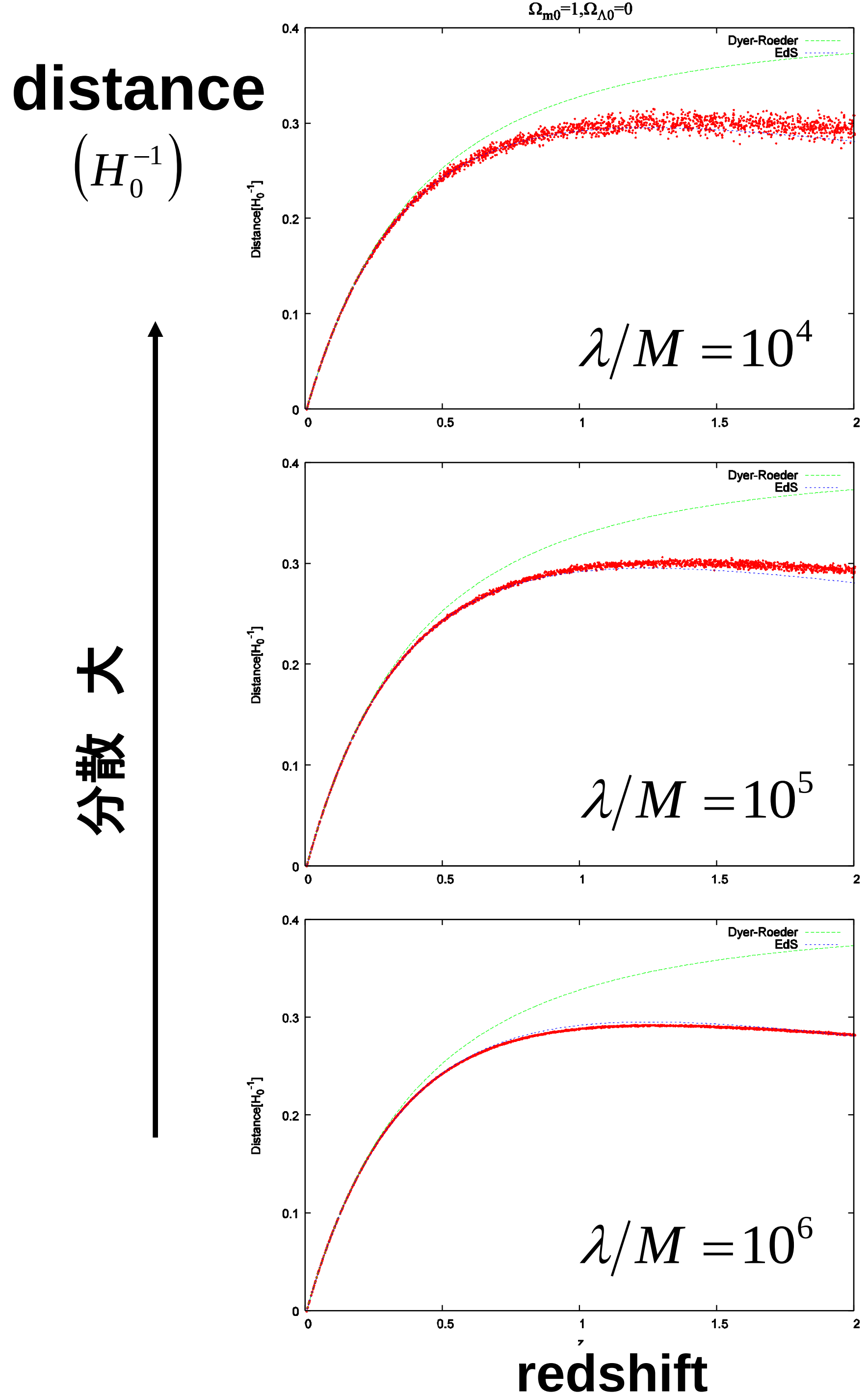
redshift

分散　～20-30 %

波動光学

$\lambda >> M$

分散からダークマターの質量に制限



λ= M となる質量

TAMA, LIGO	$\approx 10^3 M_{sun}$
DECIGO/BBO	$\approx 10^5 M_{sun}$
LISA	$\approx 10^8 M_{sun}$

目次

4.1 議論

●レンズを受けた重力波シグナルの見分け方

・同じ形の波形が同じ方向から複数来た場合

Time delay だけ遅れてシグナルが到着

・チャープシグナルの振幅に（干渉による）振動パターンがある場合

・理論的に予想される振幅 A_{th} と観測されたもの A_{obs} とが一致しないとき

$$A_{th} \propto \dot{f} / \left(f^{3} D \right)$$

$$|\mu|^{1/2} = A_{obs} / A_{th}$$

D : host galaxy までの距離
redshift から決定

●重力レンズを受ける確率

遠方の QSOs が手前の銀河により重力レンズをうけて多重像を作る（strong lensing）確率： 0.1-1 %

銀河より軽いレンズ天体も含めれば確率は上がる

弱い重力ポテンシャルによる散乱（weak lensing）なら起こる

4.2 まとめ

重力波の重力レンズでの波動効果

回折と干渉効果

・回折

重力波の波長 $\lambda >$ レンズ天体のシュワルツシルト半径 M

・干渉

重力波がコヒーレントな波